Université Mohammed V.
Faculté des sciences -Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2014-2015.

Habib Kadi

Analyse S1 (SMPC)

TD : Série I.
(3 Séances)

Exercice 1. *Les suites suivantes sont-elle majorées, minorées, bornées, monotones ?*

1. $u_n = \dfrac{3n-1}{2n+12}$.
2. $u_n = (-1)^n$.
3. $u_n = 2n^2 - 1$.
4. $u_n = \cos(\frac{n\pi}{6})$.
5. $u_n = \dfrac{1}{n^2 + (-1)^n(n+1)}$.

Exercice 2. *Déterminer la limite de chacune des suites réelles suivantes :*

1. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n}$.
2. $\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$.
3. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$.
4. $\dfrac{n+1}{\sqrt{n+2}} - \dfrac{n+1}{\sqrt{n+3}}$.
5. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$, *(remarquer que* $\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2+k^2} \leq \frac{1}{n^2}$ *pour* $1 \leq k \leq n$*).*

Exercice 3. Contrôle continu N 1 (SMPC S1, 2011/2012)
Soit la suite réelle $(u_n)_n$ *définie par :*

$$u_0 = 2 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Démontrer par récurrence que : $u_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2) Démontrer que la suite $(u_n)_n$ *est décroissante.*
3) En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

Exercice 4. *On considère la suite définie par :*

$$u_0 = 1 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}, \quad pour\ tout \quad n \in \mathbb{N}$$

1) i) Déterminer la monotonie de la fonction $f(x) = \frac{3+2x}{x+2}$ *pour* $x > 1$.
ii) Montrer que $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$
2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ *est convergente et calculer sa limite.*

$2(x+2)-3-2x$

exosup.com
page facebook

Exercice 5. *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{4}{u_n})$*

1) Montrer que $u_n^2 \geq 4$ pour tout $n > 1$.

2) En déduire que $(u_n)_n$ est décroissante, qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6. *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n + 1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

1) Vérifier que $(u_n)_n$ est croissante.

2) Démontrer par l'absurde que $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

3) En déduire que $(u_n)_n$ n'est pas majorée.

Exercice 7. *Soient les suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :*

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

2) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Conclure.

Exercice 8. *Soit la suite s_n définie par : $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que : $u_n = s_{2n}$ et $v_n = s_{2n+1}$*

1) Vérifier que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont monotones et bornées

2) $(s_n)_n$ est elle une suite monotone ?

3) Soit $w_n = v_n - u_n$. Calculer la limite de la suite $(w_n)_n$.

Exercice 9. *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{6}{u_n+5}$ $\forall n \in \mathbb{N}$*

1) Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{6}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) i) Si la suite $(u_n)_n$ converge, quelle est sa limite éventuelle ?

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_{n+1} - 1| \leq k|u_n - 1| \quad \text{où } k \text{ est une constante à déterminer.}$$

iii) En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente et qu'elle converge vers 1.

Exercices complémentaires :

Exercice 10. *Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par :*

$$u_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 11. Rattrapage (SMPC S1, 2011/2012)

Soit $a > 0$, on définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$

1) Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$

2) Montrer que si $n \geq 1$, alors $u_n \geq \sqrt{a}$; puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\sqrt{a}$.

exosup.com page facebook

Analyse

Serie 1:

Exercice ①:

) $U_m = \frac{3m-1}{2m+12} = \frac{1}{2}\left(\frac{3m-1}{m+6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3m+18-18-1}{m+6}\right)$

$U_m = \frac{1}{2}\left(\frac{3(m+6)}{m+6} - \frac{19}{m+6}\right) = \frac{3}{2} - \frac{19}{2(m+6)} < \frac{3}{2}$

$\Longrightarrow$ **Um majoré par 3/2**

$-1 \leq -\frac{1}{2m+12} \leq \frac{3m-1}{2m+12} \Longrightarrow$ **Um minoré par -1**

$\Longrightarrow$ Um minorée + majorée $\Longrightarrow$ **Um bornée**

$U_{m+1} - U_m = \frac{3(m+1)-1}{2(m+1)+12} - \frac{3m-1}{2m+12}.$

$= \frac{3m+2}{2m+14} - \frac{3m-1}{2m+12}$

$= \frac{(3m+2)(2m+12) - (3m-1)(2m+14)}{X \oplus}$

$= \frac{(6m^2+36m+4m+24) - (6m^2+42m-2m-14)}{X \oplus}$

$U_{m+1} - U_m = \frac{38}{\oplus} \geq 0$

donc $U_m \nearrow$ (croissante) et même strictement croissante.

3) $U_m = 2m^2 - 1$.

on a $-1 \leq 2m^2 - 1 = U_m$, $\forall m$

$\Longrightarrow$ **Um est minorée.**

Supposons que Um est majorée par $M \geq 0$

$\Longrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$, $2m^2 - 1 \leq M$

$\Longrightarrow m^2 \leq \frac{M+1}{2} \Longrightarrow m \leq \sqrt{\frac{M+1}{2}}$. $\forall m$

Habib Kadi

exosup.com page facebook

$$U_{n+1} - U_n = \left(2(n+1)^2 - 1\right) - \left(2n^2 - 1\right)$$

$$= 2(2n+1) = 4n + 2 \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$ donc U_n est croissante.

④ $U_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

minorée $-1 \leqslant \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \leqslant 1$ majorée

on a $U_0 = 1$; $U_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $U_2 = \frac{1}{2}$; $U_3 = 0$, $U_4 = -\frac{1}{2}$, $U_6 = -1$; $U_{12} = 1$

donc $U_0 > U_3$ et $U_{12} > U_3$

la suite $(U_n)_n$ n'est ni ↗ ni ↘

Exercice ②:

① $U_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^n}$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$$

donc $U_n \longrightarrow 1/2$

Habib Kadi

② $U_n = \frac{n \sin(n)}{n^2 + 1}$

$U_n = \frac{n}{n^2+1} \sin(n) \Longleftrightarrow -1 \leqslant \sin n \leqslant 1$

$$-\frac{n}{n^2+1} \leqslant U_n \leqslant \frac{n}{n^2+1}$$

$0 \swarrow$ (à gauche), $\searrow 0$ (à droite)

$\Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

③ $U_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$

$$U_n = \frac{(n+3) - (n+2)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} \longrightarrow 0$$

exosup.com page facebook

Analyse

serie n°1 :

④ $U_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}} - \frac{n+1}{\sqrt{n+3}} = (n+1)\left(\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}\right)$

$U_n = \frac{(n+1)\left((n+3)-(n+2)\right)}{\sqrt{(n+2)(n+3)}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right)}$

$U_n = \frac{n+1}{n\sqrt{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)\right)}$

$U_n = \frac{n+1}{n\sqrt{n}\sqrt{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}$

donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{\infty} = 0$

Habib Kadi

⑤ $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

avec $\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2+k^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pour $1 \leq k \leq n$

on a $U_1 = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$

$U_2 = \frac{1}{2^2+1^2} + \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$

$U_3 = \frac{1}{3^2+1^2} + \frac{1}{3^2+2^2} + \frac{1}{3^2+3^2}$

on a (n termes)
$$\begin{cases} \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2+1^2} \leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2+2^2} \leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

$n \times \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq n \times \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq U_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

($\frac{1}{2n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$)

exosup.com

page facebook

Exercice 3 : $U_0 = 2$ et $U_{m+1} = \frac{4U_m - 1}{U_m + 2}$; $\forall m \in \mathbb{N}$

① om suppose que le propriété est varie pour $m : (U_m) > 1$
et demomtrer que $U_{m+1} > 1$?

$$U_{m+1} - 1 = \frac{4U_m - 1}{U_m + 2} - 1 = \frac{3U_m - 3}{U_m + 2}$$

$$= \frac{3(U_m - 1)}{U_m + 2} > 0$$

② $$U_{m+1} - U_m = \frac{4U_m - 1}{U_m + 2} - U_m = \frac{4U_m - 1 - U_m^2 - 2U_m}{U_m + 2}$$

$$= \frac{2U_m - U_m^2 - 1}{U_m + 2} = -\frac{(U_m - 1)^2}{U_m + 2} \leq 0$$

domc **Um est décroissante.**

③ **Ume suite decroissante + mimorée domc convergente**

et si $l = \lim_{m \to +\infty} U_m$

$$\Rightarrow l = \frac{4l - 1}{l + 2} \Leftrightarrow l^2 + 2l = 4l - 1$$

$$\Rightarrow l^2 - 2l + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (l - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{l = 1}$$

Habib Kadi

Exercice ④ : $U_0 = 1$ et $U_{m+1} = \frac{2U_m + 3}{U_m + 2}$, $\forall m \in \mathbb{N}$

①(i) $$f(x) = \frac{3 + 2x}{x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - x(3+2x)}{x+2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

f est ↗ croissamte

exosup.com page facebook

Analyse

serie n°1:

m : (U_m) 1) on montre que $1 \leqslant U_m \leqslant \sqrt{3}$:

$U_0 = 1 \geqslant 1$, on suppose que $U_m \geqslant 1$

$$U_{m+1} - 1 = \frac{2U_m+3}{U_m+2} - 1 = \frac{2U_m+3-U_m-2}{U_m+2} = \frac{U_m+1}{U_m+2} \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$ $U_{m+1} > 1$

on a $U_0 = 1 \leqslant \sqrt{3}$

on suppose que $U_m \leqslant \sqrt{3}$

$$f \nearrow \Longrightarrow f(U_m) \leqslant f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+2}$$

$\Longrightarrow$ $U_{m+1} \leqslant \sqrt{3}$

Habib Kadi

2) $U_0 = 1$; $U_1 = f(U_0) = f(1) = 5/3 > 1 = U_0$

$U_1 > U_0 \Longrightarrow (U_m)_m$ est $\nearrow$ croissante.

donc $U_m \nearrow$ + majorée $\Longrightarrow$ U_m convergente

et sa limite ℓ :

$$\ell = f(\ell) = \frac{3+2\ell}{\ell+2} \Longleftrightarrow \ell^2 + 2\ell = 3 + 2\ell$$

$\Longleftrightarrow \ell_1 = \sqrt{3}$ ou $\ell = -\sqrt{3}$

or on a $U_m \geqslant 1$, $\forall m$

$\Longrightarrow \lim U_m = \ell \geqslant 1 \geqslant 0$

$\Longrightarrow$ $\ell = \ell_1 = \sqrt{3}$

exosup.com page facebook

Exercice 5: $U_0 > 1$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right)$

1) * pour $n = 1$: on a :

$$U_1^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{4}{U_n}\right)\right)^2 - 4$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{4}{U_0}\right) - 2\right)\left(\frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{4}{U_0}\right) + 2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}U_0 + \frac{2}{U_0} - 2\right)\left(\frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{4}{U_0}\right) + 2\right)$$

$$= \left(\frac{U_0^2 + 4 - 4U_0}{2U_0}\right)\left(\frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{4}{U_0}\right) + 2\right)$$

$$= \frac{(U_0 - 2)^2}{2U_0}\left(\frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{4}{U_0}\right) + 2\right) \geqslant 0$$

* Supposons que la relation varie pour n et la démontrer à n+1 :

$$U_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right)\right)^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right)\right)^2 + 2^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) - 2\right)\left(\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right)\right) + 2$$

$$= \left(\frac{U_n^2 + 8 - 4U_n}{2U_n}\right)\left(\frac{U_n^2 + 8 + 4U_n}{2U_n}\right) \geqslant 0$$

$\Rightarrow$ donc $U_{n+1}^2 \geqslant 4 \Rightarrow \boxed{U_n^2 \geqslant 4}$

Habib Kadi

2) $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right)$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{U_n^2}\right)$ or $U_n^2 \geqslant 4 \Rightarrow \frac{4}{U_n^2} \leqslant 1$

$\Rightarrow 1 + \frac{4}{U_n^2} \leqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{U_n^2}\right) \leqslant 1$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1 \Rightarrow \boxed{U_{n+1} \leqslant U_n}$ $(U_n \geqslant 0)$

exosup.com page facebook

Analyse

Serie n°1 :

a la suite $(U_n)_n$ est minorée par 2 est décroissante :
U_n convergente et sa limite l vérifié :

$$l = f(l) \Longleftrightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{4}{l}\right)$$

$$\Longleftrightarrow 2l = l + \frac{4}{l} \Longleftrightarrow l = \frac{4}{l} \Longleftrightarrow l^2 = 4$$

$$\Longleftrightarrow l_1 = 2 \text{ et } l_2 = -2$$

or $U_n \geq 0 \Longrightarrow l \geq 0 \Longrightarrow \boxed{l = 2}$

Exercice 6 :

$U_0 = 1$; $U_{n+1} = U_n + \sqrt{U_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

① $U_{n+1} - U_n = U_n + \sqrt{U_n+1} - U_n = \sqrt{U_n+1} \geq 0$

U_n est croissante

② On suppose par U_n converge vers $l \in \mathbb{R}$:

on a $U_n \nearrow \Longrightarrow U_n \geq U_{n-1} \geq U_{n-2} \geq \cdots \geq U_0 = 1$

$\Longrightarrow \forall n$; $U_n \geq 1 \Longrightarrow \boxed{l \geq 1}$

or $U_{n+1} = U_n + \sqrt{U_n+1}$

$\Longrightarrow l = l + \sqrt{l+1} \Longrightarrow \sqrt{l+1} = 0 \Longrightarrow \boxed{l = -1}$

③ si on suppose que $(U_n)_n$ est majoré, alors $(U_n)_n$ serait une suite $\nearrow_+$ majorée $\Longrightarrow U_n$ converge et ça c'est absurde.

Habib Kadi

Exercice 7 :

$$\begin{cases} U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \\ V_n = U_n + \dfrac{1}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

① $U_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$U_2 = \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$

$U_3 = \dfrac{1}{3+1} + \dfrac{1}{3+2} + \dfrac{1}{3+3}$

exosup.com page facebook

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+1+1} + \frac{1}{n+1+2} + \cdots + \frac{1}{n+1+n-1} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+n}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{2n+} + \frac{1}{2n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}}_{-\frac{1}{2n+2}}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \boxed{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}} > 0$$

② on a $U_{n+1} - U_n \geq 0 \Longrightarrow \boxed{U_n \nearrow}$ ①

$$V_{n+1} - V_n = (U_{n+1} - V_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} - \frac{1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n-4n-2}{(4n+2)n}\right)$$

$$= -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{3n+2}{(4n+2)n} \leq 0 \Longleftarrow \boxed{V_n \searrow}$$ ②

Habib Kadi

et $V_n = U_n + \frac{1}{n} \Longrightarrow \boxed{U_n \leq V_n}$ ③

et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0}$ ④

Pour ①, ②, ③ et ④ les deux suites (V_n) et (U_n) sont <u>adjacentes.</u>

exosup.com

exosup.com page facebook

Analyse

serie n 1 :

Exercice (8) : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$; $U_n = S_{2n}$ et $V_n = S_{2n+1}$

$$S_n = -\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} - \frac{1}{3+1} + \cdots + \frac{(-)^n}{n+1}$$

$$U_n = S_{2n} = \frac{-1}{1+1} + \frac{1}{2+1} - \frac{1}{3+1} + \cdots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-2+1} + \frac{(1)^{2n-1}}{2n-1+1} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1}$$

$$V_n = S_{2n+1} = \frac{-1}{1+1} + \frac{1}{2+1} - \frac{1}{3+1} + \cdots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1+1} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1}$$

$$U_{n+1} = S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = -\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} - \frac{1}{3+1} + \cdots + \frac{(-1)^{2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1} + \frac{(1)^{2n+2}}{2n+2+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} \leq 0$$

$\Longrightarrow$ $(U_n)_n$ est décroissante

et on a $V_{n+1} - V_n$:

$$V_{n+1} = S_{2(n+1)+1} = S_{2n+3} = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \cdots + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3+1}$$

$$V_{n+1} - V_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+4}$$

$$= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} \geq 0$$

Habib Kadi

donc $(V_n)_n$ est croissante.

(2) on a $U_n = S_{2n}$ et $V_n = S_{2n+1}$

$$V_n - U_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{-1}{2n+2} \leq 0$$

$\Longrightarrow$ $V_n \leq U_n$

$V_n \nearrow$, $U_n \searrow$

(3) $\left[\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0\right]$

exosup.com page facebook

Exercice 9 : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{6}{u_n + 5}$

① • on a $0 \leq u_0 = 0 \leq \frac{6}{5}$ ⟹ relation est vrai

* on suppose que la propriété est vrai $u_n \leq \frac{6}{5}$ et on démontre $u_{n+1} \leq \frac{6}{5}$: $u_{n+1} - \frac{6}{5} = \frac{6}{u_n+5} - \frac{6}{5} = \frac{30 - 6u_n - 30}{5(u_n+5)} = \frac{-6u_n}{5u_n+25} < 0$

donc $u_{n+1} \leq \frac{6}{5}$

$u_{n+1} - 0 = \frac{6}{u_n+5} \geq 0 \implies 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{5}$

donc $\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{6}{5}}$

Habib Kadi

2) i) Si u_n converge vers $\ell \in \mathbb{N}$ alors :

$\ell = f(\ell) = \frac{6}{\ell + 5}$

$\iff \ell^2 + 5\ell + 6 = 0$ donc $\Delta = 25 + 24 = 49$

$\ell_1 = \frac{-5+7}{2} = 1$ et $\ell_2 = \frac{-5-7}{2} = -6$

or $0 \leq u_n \leq \frac{6}{5}, \forall n$

$\implies 0 \leq \lim u_n \leq \frac{6}{5} \implies \boxed{0 \leq \ell \leq \frac{6}{5}}$

donc $\boxed{\ell = \ell_1 = 1}$

ii) on a $u_{n+1} - 1 = \frac{6}{5+u_n} - 1 = \frac{6-5-u_n}{5+u_n} = \frac{1-u_n}{5+u_n}$

$\implies |u_{n+1} - 1| = \frac{|1-u_n|}{|5+u_n|} = \frac{1}{5+u_n} \cdot |u_n - 1|$ (*)

on sait que $0 \leq u_n \leq \frac{6}{5}$

$\implies 5 \leq 5 + u_n \leq \frac{6}{5} + 5 = \frac{31}{5}$

$\implies \frac{5}{31} \leq \frac{1}{5+u_n} \leq \frac{1}{5}$

(*) devient : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{5}|u_n - 1|$; $k = \frac{1}{5}$

exosup.com page facebook